

**Демонстрационный вариант заданий для практической части  
предпрофессионального экзамена в рамках проекта**

**«Академический класс в московской школе»**

**на площадке НИЯУ МИФИ**

**Направление практической части:** *Прикладная математика*

**Направление подготовки:** *Прикладная математика*

**Ситуационная задача 1.**

**Четыре числа** (*решение системы нелинейных алгебраических уравнений в среде MathCad*)

Найти четыре действительных числа, таких, что каждое, сложенное с произведением остальных, равнялось бы заданному параметру  $a$ . Найти все решения. Решить задачу аналитически для  $a=2$  и  $a=10$  и численно для  $a=3$ .

*Базовые уровни оценки.*

Оценка 60 баллов – найдены все решения для всех значений параметра.

Оценка 50 баллов - корректно найдены не все решения, но не менее 70%.

Оценка 40 баллов – найдено менее 70% решений, возможно, допущены незначительные ошибки в процессе преобразований.

Оценка 30 баллов – корректно найдено менее 50% решений, возможно, допущены ошибки в процессе преобразований.

Оценка 20 баллов – корректно найдено менее 30% решений, допущены существенные ошибки в процессе преобразований.

Оценка 10 баллов – задача не решена, но есть элементы правильного решения.

Оценка 0 баллов – решение задачи отсутствует

*Дополнительные баллы (от 1 до 9) могут быть добавлены к базовому уровню оценки (кроме 60 баллов) за дополнительные элементы решения, нестандартный подход, правильные выводы, хорошее оформление работы.*

Условие задачи:

Найти четыре действительных числа, таких, что каждое, сложенное с произведением остальных, равнялось бы заданному параметру  $a$ . Найти все решения. Решить задачу аналитически для  $a=2$  и  $a=10$  и численно для  $a=3$ .

Решение.

Составляем по условию задачи систему уравнений и записываем ее в среде MathCad сначала при  $a=2$ :

$$a := 2$$

Given

$$x + y \cdot z \cdot t = a$$

$$y + x \cdot z \cdot t = a$$

$$z + x \cdot y \cdot t = a$$

$$t + x \cdot y \cdot z = a$$

Применим аналитический оператор Find. В результате получим полный набор решений в аналитическом виде:

$$\text{Find}(x, y, z, t) \rightarrow \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{7}i & -\frac{1}{2} - \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)i & 1 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{7}i & -\frac{1}{2} - \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)i & 1 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{7}i & -\frac{1}{2} - \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)i & 1 & -1 & -1 & -1 & 3 \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{7}i & -\frac{1}{2} - \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)i & 1 & 3 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Получается 7 решений, два из которых комплексные. Т.к. по условию числа должны быть действительными, то остается 5 решений (3-7 столбцы).

Перейдем к случаю  $a=3$ . Аналитический оператор Find решений не даст, но их можно получить по одному с помощью численного оператора Find, используя в качестве нулевого приближения решения, полученные для  $a=2$ , например,

$$a := 3$$

Given

$$x + y - z - t = a$$

$$y + x - z - t = a$$

$$z + x - y - t = a$$

$$t + x - y - z = a$$

$$x := 1 \quad y := 1 \quad z := 1 \quad t := 1$$

$$\text{Find}(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Остальные решения при  $a=3$  получаем аналогично.

Решим теперь задачу для случая  $a=10$ . Здесь опять оказывается возможным применить аналитический оператор Find, но количество решений существенно увеличится:

$$\text{Find}(x, y, z, t) \rightarrow \begin{pmatrix} -1 + 2i & -1 - 2i & 2 & 1 & 1 & 9 & 1 & -1 & 11 & -1 & -1 & 5 - 2\sqrt{6} & 5 - 2\sqrt{6} & 2\sqrt{6} + 5 & 2\sqrt{6} + 5 & 5 - 2\sqrt{6} & 2\sqrt{6} + 5 \\ -1 + 2i & -1 - 2i & 2 & 1 & 9 & 1 & 1 & 11 & -1 & -1 & -1 & 2\sqrt{6} + 5 & 2\sqrt{6} + 5 & 5 - 2\sqrt{6} & 5 - 2\sqrt{6} & 5 - 2\sqrt{6} & 2\sqrt{6} + 5 \\ -1 + 2i & -1 - 2i & 2 & 1 & 1 & 1 & 9 & -1 & -1 & 11 & -1 & 5 - 2\sqrt{6} & 2\sqrt{6} + 5 & 5 - 2\sqrt{6} & 2\sqrt{6} + 5 & 2\sqrt{6} + 5 & 5 - 2\sqrt{6} \\ -1 + 2i & -1 - 2i & 2 & 9 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 11 & 2\sqrt{6} + 5 & 5 - 2\sqrt{6} & 2\sqrt{6} + 5 & 5 - 2\sqrt{6} & 2\sqrt{6} + 5 & 5 - 2\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

Количество решений достигает 17-ти, два из них комплексные. Таким образом, в данном случае получается 15 действительных решений.

Таким образом, все решения для заданных значений параметра найдены.

## Ситуационная задача 2.

**Двухрезонаторный клистрон.** (*синтез клистрона с максимальным КПД.*)

Заданы все параметры клистрона: ускоряющее напряжение 16 кВ, количество лучей 7, суммарный ток лучей 3А, рабочая частота 800 МГц, диаметр труб дрейфа 6 мм, диаметры лучей 3.5 мм, характеристические сопротивления резонатором 70 Ом, собственные добротности резонаторов 5000, нагруженная добротность входного резонатора равна 70, зазоры резонаторов равны 11 мм,

количество резонаторов - два (входной и выходной), оба резонатора настроены на рабочую частоту (расстройки равны нулю).

Найти длину трубы дрейфа, нагруженную добротность выходного резонатора и входную мощность, обеспечивающие максимальное значение КПД. Найти это максимальное значение. Решить задачу в кинематическом приближении и с учетом пространственного заряда. Сравнить эти решения.

*Базовые уровни оценки.*

Оценка 60 баллов – корректно введены данные, правильно выбраны начальные значения параметров оптимизации, исследованы все режимы для начального приближения. Корректно проведена оптимизация в кинематическом случае и с учетом пространственного заряда, получены правильные значения параметров оптимизации и правильные значения максимального КПД.

Оценка 50 баллов - корректно введены данные, правильно выбраны начальные значения параметров оптимизации, исследованы все режимы для начального приближения. Возможно, не до конца проведена одна из оптимизаций. Значения параметров оптимизации и значения максимального КПД, возможно, несколько отличаются от правильных.

Оценка 40 баллов – - корректно введены данные, правильно выбраны начальные значения параметров оптимизации, возможно исследованы не все режимы для начального приближения. Возможно, оптимизация проведена с ошибками. Значения параметров оптимизации и значения максимального КПД отличаются от правильных.

Оценка 30 баллов – корректно введены данные, начальные значения параметров оптимизации выбраны правильно. Значения параметров оптимизации и значения максимального КПД получены с ошибками.

Оценка 20 баллов – корректно введены данные, но начальные значения параметров оптимизации выбраны неправильно. Значения параметров оптимизации и значения максимального КПД, не получены или получены с существенными ошибками.

Оценка 10 баллов – задача не решена, но есть элементы правильного решения.

Оценка 0 баллов – решение задачи отсутствует.

*Дополнительные баллы* (от 1 до 9) могут быть добавлены к базовому уровню оценки (кроме 60 баллов) за дополнительные элементы решения, нестандартный подход, правильные выводы, хорошее оформление работы.